Mathématique
Interrogation du lundi 5 novembre 2018

QUESTIONNAIRE

Théorie

1. Définir la fonction sinus de manière géométrique. Préciser son domaine de définition et son image. Représenter ensuite (sur un autre schéma) le réel valant le sinus du nombre 2.

2. Qu'appelle-on fonction injective ? Comment définit-on la fonction inverse d'une fonction injective ?

Exercices

1. Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation suivante
$$|1-|x|| \leq 2x - x^2.$$

2. Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation
$$\cos(4x) - 1 = \sin(4x).$$

3. Si elles existent, simplifier les expressions suivantes au maximum.
$$(1)\ \arccos\left(-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \qquad (2)\ \left(\exp\left(\frac{\ln(e^2)}{2}\right)\right)^2$$

4. Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué du complexe $z = \dfrac{i^{2018}}{1+i}$.

5. Dans un repère orthonormé, représenter les ensembles décrits par les équations suivantes. S'il s'agit de conique(s), en préciser le nom, l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.
$$(1)\ 4x^2 - 4 = 12 - y^2 \qquad (2)\ x^2 = y^2 + 1 \qquad (3)\ xy - y = 0.$$

6. ***Problème élémentaire : <u>rédiger</u> votre réponse.***

   Un bateau à moteur, fonctionnant à plein régime, parcourt 9 km en 20 minutes en remontant une rivière dont le courant est constant. Mais on constate que le moteur est endommagé et qu'il faudra le ménager pour retourner au point de départ.... On redescend alors la rivière avec le même courant mais avec une vitesse à plein régime diminuée de moitié (par rapport à l'aller).
   Sachant qu'il met une demi-heure pour revenir à son point de départ, quelle est la vitesse du courant et quelle était initialement la vitesse à plein régime du bateau en eau calme ?

CORRIGE

Théorie

1. **Définir la fonction sinus de manière géométrique. Préciser son domaine de définition et son image. Représenter ensuite (sur un autre schéma) le réel valant le sinus du nombre 2.**

   Solution. Voir cours

2. **Qu'appelle-on fonction injective ? Comment définit-on la fonction inverse d'une fonction injective ?**

   Solution. Voir cours

Exercices

1. **Déterminer les solutions réelles x de l'inéquation suivante**

$$|1-|x|| \leq 2x - x^2.$$

Solution. Le premier membre de l'inéquation étant positif, le second doit l'être aussi et dès lors seuls les réels de $[0,2]$ peuvent appartenir à l'ensemble des solutions. Si $x \in [0,2]$ alors $|x| = x$ et l'inéquation donnée s'écrit $|1-x| \leq 2x - x^2$.
Si $x \in [0,1]$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} 1 - x \leq 2x - x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x + 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

puisque le discriminant est égal à $9 - 4 = 5$. Comme $x \in [0,1]$, puisque $\frac{3+\sqrt{5}}{2} > 1$, l'ensemble des solutions est

$$S_1 = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, 1\right].$$

Si $x \in [1,2]$, l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} x - 1 \leq 2x - x^2 \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - x - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$

puisque le discriminant est égal à $1 + 4 = 5$. Comme $x \in [1,2]$, puisque $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$, l'ensemble des solutions est

$$S_2 = \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation donnée est

$$S = \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right].$$

2. **Sachant que l'inconnue réelle x est dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, résoudre l'équation**

$$\cos(4x) - 1 = \sin(4x).$$

Solution. L'équation est définie pour $x \in \mathbb{R}$. Comme $\cos(4x) = 1 - 2\sin^2(2x)$ et $\sin(4x) = 2\sin(2x)\cos(2x)$, elle est équivalente à

$$\begin{aligned}
&-2\sin^2(2x) = 2\sin(2x)\cos(2x)\\
&\Leftrightarrow \sin(2x) = 0 \quad \text{ou} \quad -\sin(2x) = \cos(2x)\\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : 2x = k\pi \quad \text{ou} \quad \sin(-2x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad -2x = \pi - \frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi\\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad 4x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi\\
&\Leftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : x = \frac{k\pi}{2} \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}$$

L'équation donnée a donc pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{k\pi}{2},\ -\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 2\pi]$ sont

$$\pi,\ \frac{11\pi}{8},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{15\pi}{8},\ 2\pi.$$

3. **Si elles existent, simplifier les expressions suivantes au maximum.**

$$(1)\ \operatorname{arcos}\left(-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) \qquad\qquad (2)\ \left(\exp\left(\frac{\ln(e^2)}{2}\right)\right)^2$$

Solution.
(1) La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et son image est $[-1, 1]$. Comme la fonction arcos est définie sur $[-1, 1]$ et d'image $[0, \pi]$, l'expression est donc définie et on a

$$\operatorname{arcos}\left(-\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)\right) = \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\pi - \frac{4\pi}{5}\right)\right) = \operatorname{arcos}\left(\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)\right) = \frac{\pi}{5}.$$

(2) La fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$ et $e^2 > 0$. L'image de ln est $\mathbb{R}$, domaine de définition de la fonction exp ; la fonction donnée est donc définie.
Puisque $\ln(x^2) = 2\ln(x), x > 0$ et $\ln(e) = 1$, on a $\ln(e^2) = 2$ et l'expression donnée vaut

$$(\exp(1))^2 = e^2.$$

4. **Déterminer les parties réelle et imaginaire, le module et le conjugué du complexe**

$$z = \frac{i^{2018}}{1+i}.$$

Solution. Comme $i^{2018} = i^{2016}\ i^2 = -1$, le nombre complexe z s'écrit aussi

$$z = \frac{-1}{1+i} = \frac{-(1-i)}{2} = \frac{-1+i}{2}.$$

Ainsi, sa partie réelle vaut $\Re z = -1/2$, sa partie imaginaire vaut $\Im z = 1/2$, son module vaut $\sqrt{1/4 + 1/4} = \sqrt{2}/2$ et son conjugué est le complexe $\overline{z} = (-1-i)/2$.

5. **Dans un repère orthonormé, représenter les ensembles décrits par les équations suivantes. S'il s'agit de conique(s), en préciser le nom, l'excentricité, les coordonnées du (des) foyer(s) et l'équation des éventuelles asymptotes.**

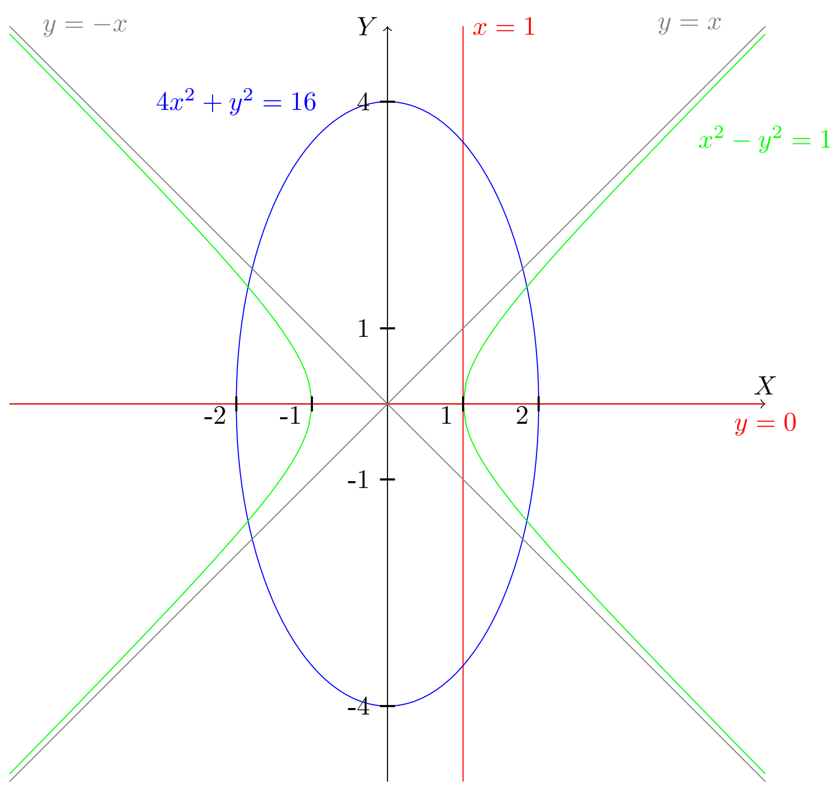
$$(1)\ 4x^2 - 4 = 12 - y^2 \qquad (2)\ x^2 = y^2 + 1 \qquad (3)\ xy - y = 0.$$

Solution. Puisque $4x^2 - 4 = 12 - y^2 \Leftrightarrow 4x^2 + y^2 = 16$, l'équation (1) est celle d'une ellipse dont les points d'intersection avec les axes ont pour coordonnées $(-2, 0)$, $(2, 0)$, $(0, -4)$ et $(0, 4)$. Dès lors, les foyers ont pour coordonnées $(0, -2\sqrt{3})$ et $(0, 2\sqrt{3})$ et l'excentricité vaut $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Puisque $x^2 = y^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$, l'équation (2) est celle d'une hyperbole qui intersecte l'axe des abscisses aux points de coorcdonnées $(-1, 0)$ et $(1, 0)$. Ses asymptotes sont les droites d'équation $y = -x$ et $y = x$. Dès lors, les foyers ont pour coordonnées $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ et $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ et l'excentricité vaut $e = \sqrt{2}$.

Puisque $xy - y = 0 \Leftrightarrow y(x - 1) = 0$, l'équation (3) est celle de deux droites d'équation cartésienne $y = 0$ (axe des abscisses) et $x = 1$ (droite parallèle à l'axe des ordonnées).

Voici la représentation graphique de ces ensembles :



6. **Problème élémentaire : <u>rédiger</u> votre réponse.**
Un bateau à moteur, fonctionnant à plein régime, parcourt* $9\ km$ *en* 20 *minutes en remontant une rivière dont le courant est constant. Mais on constate que le moteur est endommagé et qu'il faudra le ménager pour retourner au point de départ... On redescend alors la rivière avec le même courant mais avec une vitesse à plein régime diminuée de moitié (par rapport à l'aller).
Sachant qu'il met une demi-heure pour revenir à son point de départ, quelle est la

vitesse du courant et quelle était initialement la vitesse à plein régime du bateau en eau calme ?

Solution. Ce problème est analogue au problème I.3 de la liste 1 du fascicule d'exercices pour les répétitions.
Soient v_b et v_c respectivement la vitesse du bateau à plein régime en eau calme et celle du courant en km/h. Une vitesse de 9 km en 20 minutes correspond à 27 km/h et 9 km en une demi-heure correspond à 18 km/h.
La vitesse à l'aller est $v_b - v_c = 27$ et la vitesse au retour est $v_b/2 + v_c = 18$. Ainsi, on doit résoudre

$$\left\{ \begin{array}{l} v_b - v_c = 27 \\ \frac{v_b}{2} + v_c = 18 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_b - v_c = 27 \\ v_b + 2v_c = 36 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} 3v_c = 9 \\ v_b = 27 + v_c \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} v_c = 3 \\ v_b = 30. \end{array} \right.$$

Ainsi, la vitesse du courant est de 3 km/h et, initialement, la vitesse à plein régime du bateau en eau calme était de 30 km/h.